Rechnen verstehen: Kettenregel, Substitution und die Methode der Trennung der Variablen

FRANZ PAUER, FLORIAN STAMPFER (UNIVERSITÄT INNSBRUCK)

1. Einleitung

„Als Feminina hänge man die Frauen an die Bäume an“: Diese Merkregel hat der ältere der Autoren im Lateinunterricht gelernt und weiß damit bis heute, dass eine große Buche *magna fagus* und nicht *magnus fagus* heißt. Verständnis, warum das so ist, wurde dadurch allerdings nicht geweckt. Und sicherlich ist diese Merkregel aus dem heutigen Lateinunterricht bereits verschwunden, da sie wegen des Frauen abwertenden Untertons schädlich im Sinne der heutigen Bildungsziele ist.
Auch im Mathematikunterricht gibt es Merkregeln, die vermittelt werden, um einige Aufgaben mit einer Folge vorgegebener, „mechanisch auszuführender“ Operationen zu lösen. In diesem Beitrag diskutieren wir zwei Beispiele dafür: Merkregeln für die Integration durch Substitution und für die Lösung von gewissen Differentialgleichungen. Bei beiden besteht für Schülerinnen und Schüler nicht die Möglichkeit, sie zu verstehen; im Gegenteil, die Merkregeln legen sogar Fehlvorstellungen nahe.

Im zweiten Abschnitt geben wir die zwei genannten Merkregeln so an, wie sie in vielen Schulbüchern dargestellt werden. Im dritten, vierten und fünften Abschnitt gehen wir kurz auf notwendige Grundkenntnisse ein: Addition, Multiplikation und Verkettung von reellwertigen Funktionen, sowie die Kettenregel der Differentialrechnung. Nach diesen Vorüberlegungen geben wir im sechsten und siebten Abschnitt einfachere Alternativen zur Lösung der oben genannten Aufgaben an und ordnen diese in den Kontext „Umkehrung der Kettenregel“ ein. Wir schließen den Beitrag mit einer Diskussion von Vor- und Nachteilen dieser zwei Merkregeln. Unser Anliegen ist:

> Nicht rechnen *oder* verstehen, sondern Rechnen verstehen!

2. Zwei häufig verwendete Merkregeln

2.1. Integrieren durch Substitution

Im aktuellen Lehrplan der AHS-Oberstufe und der HTL wird das Berechnen von „bestimmten Integralen mit Hilfe von Stammfunktionen unter Verwendung elementarer Integrationsregeln“ verlangt. Eine dieser elementaren Regeln ist die Substitutionsregel. Auf der nächsten Seite wird angegeben, wie diese in zwei Schulbüchern vermittelt wird. In beiden wird nur eine *Merkregel* angegeben, die den Schülerinnen und Schülern die Vorgehensweise vorgibt. In Timischl & Kaiser (2013) wird auch klar darauf hingewiesen, dass die Rechnung nur symbolisch geführt wird. Die empfohlene Vorgehensweise lässt sich in einem Beispiel wie folgt zusammenfassen.

Berechne das Integral durch Substitution:	$\int f(a\cdot x+b)dx = ?\,, a\neq 0$
Wähle eine geeignete Substitution:	$z = a\cdot x+b$
Schreibe die Ableitung mit Hilfe des Differentialquotienten an:	$z' = \frac{dz}{dx} = a$
Löse nach dx auf:	$dx = \frac{dz}{a}$
Ersetze $a\cdot x+b$ und dx:	$\int f(z)\frac{1}{a}dz$
Berechne dieses Integral.	

Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG), Heft 48, 2015, S 82 - 93

Berechne und kontrolliere durch Differenzieren!

a $\int (3x+5)^{17} \cdot dx$ **b** $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \cdot dx$ **c** $\int \frac{5}{x-2} \cdot dx$ **d** $\int e^{ax} \cdot dx$

Lösung: Bei den folgenden Lösungen haben wir – wie üblich – erst ganz am Schluss die Integrationskonstante c berücksichtigt. Um nicht das Gleichheitszeichen falsch zu gebrauchen, schreiben wir c in Klammer dazu. Bei der Probe lassen wir die Integrationskonstante gleich weg.

a Setze $3x+5=z$; dann ist $z' = \frac{dz}{dx} = 3$. Also ist $dx = \frac{dz}{3}$ und somit

$$\int (3x+5)^{17} \cdot dx = \int z^{17} \cdot \frac{dz}{3} = \frac{1}{3} \cdot \int z^{17} \cdot dz = \frac{1}{3} \cdot \frac{z^{18}}{18} = \frac{(3x+5)^{18}}{54} \; (+c)$$

Probe: $\left(\frac{(3x+5)^{18}}{54}\right)' = 18 \cdot (3x+5)^{17} \cdot 3 \cdot \frac{1}{54} = (3x+5)^{17}$

Abbildung 1: Anwendung der Substitutionsmethode (Götz u. a., 2013, S. 48)

Beispiel 5.33: Integration durch eine lineare Substitution B, D

Berechne: **a)** $\int (3x+2)^4 \, dx$ **b)** $\int 5e^{-2x} \, dx$ **c)** $\int \frac{3}{\sqrt{4x+1}} \, dx$ **d)** $\int \cos(bt) \, dt$

Lösung

Zu **a)** Wir führen für den *linearen* Term $3x+2$ eine neue Variable ein: $z = 3x+2$. Man sagt, dass man den Term $3x+2$ durch z substituiert.

Die folgende *symbolisch* geführte Rechnung ist eine gute Merkregel für die Vorgangsweise bei der Substitution. Auf eine korrekte Begründung wird verzichtet.

$z' = \frac{dz}{dx} = 3 \Rightarrow dx = \frac{1}{3} dz.$

Somit: $\int (3x+2)^4 \, dx = \int z^4 \cdot \frac{1}{3} dz = \frac{1}{3} \int z^4 \, dz.$

Damit ist der Zweck der Substitution erreicht, ein Grundintegral zu erhalten.

$\frac{1}{3} \int z^4 \, dz = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot z^{4+1} + C = \frac{1}{15} \cdot (3x+2)^5 + C.$

Probe: $\left[\frac{1}{15} \cdot (3x+2)^5 + C\right]' = \frac{1}{15} \cdot 5\,(3x+2)^4 \cdot 3 + 0 = (3x+2)^4.$

Ausmultiplizieren wäre hier auch gegangen, ist aber deutlich aufwändiger.

Wichtig ist hier auch der Ausdruck „dx“ im Integral $\int f(x)\,dx$ neben dem Integranden.

Die Substitution erstreckt sich nicht nur auf den Integranden f(x), sondern auch auf das Symbol dx.

Abbildung 2: Integration durch Substitution (Timischl & Kaiser, 2013, S. 173)

2.2. Methode der Trennung der Variablen

In den Lehrplänen der AHS-Oberstufe und der HTL wird das Lösen einfacher Differentialgleichungen genannt. In den meisten Schulbüchern wird dabei als Lösungsverfahren die Methode der Trennung der Variablen genannt. Auf der nächsten Seite sind entsprechende Beispiele aus drei Schulbüchern abgedruckt. Wie die drei Schulbücher vorgehen, zeigen wir an Hand eines Beispiels.

Löse die Differentialgleichung:	$y' = x \cdot y$
Ersetze y' durch $\frac{dy}{dx}$:	$\frac{dy}{dx} = x \cdot y$
Multipliziere mit dx, dividiere durch y:	$\frac{dy}{y} = x \cdot dx$
Integriere (finde eine Stammfunktion) auf beiden Seiten:	$\ln\lvert y\rvert = \frac{x^2}{2} + c\,,\; c \in \mathbb{R}$
Wende auf beiden Seiten die Exponentialfunktion an:	$y = c_1 \cdot e^{x^2/2}\,,\; c_1 \in \mathbb{R}$

Bei dieser Vorgehensweise drängen sich unmittelbar folgende Fragen auf: Was ist dx und dy? Ist $\frac{dy}{dx}$ ein Quotient?

Löse die Differentialgleichung $y'(x) = 3 \cdot y(x)$
(1) in allgemeiner Form, (2) unter der Bedingung $y(0) = 2$.

(1) $y'(x) = 3 \cdot y(x)$ $\frac{dy}{dx} = 3y \quad \lvert :y \quad \lvert \cdot dx$	Die Differentiale dy und dx werden hier wie Variablen behandelt[2]. Achte darauf, dass auf jeder Seite der Differentialgleichung nur eine Variable auftritt.
$\frac{1}{y}\,dy = 3\,dx$	
$\int \frac{1}{y}\,dy = \int 3\,dx$	Auf beiden Seiten der Gleichung werden geeignete Stammfunktionen ermittelt. Es genügt, insgesamt nur eine Integrationskonstante c_1 zu berücksichtigen.
$\ln\lvert y(x)\rvert = 3x + c_1$ $e^{\ln\lvert y(x)\rvert} = e^{3x + c_1}$ $y(x) = e^{3x + c_1} = e^{c_1} \cdot e^{3x}$ $y(x) = c \cdot e^{3x}$	Die Konstante e^{c_1} wird einfacher als c bezeichnet.

Die **allgemeine Lösung** der Differentialgleichung $y'(x) = 3 \cdot y(x)$ lautet $y(x) = c \cdot e^{3x}$ und beinhaltet noch einen frei wählbaren **Parameter c**.
Dieses hier angewandte Verfahren zur Lösung einer Differentialgleichung heißt **Trennung der Variablen**.

[2] Die Multiplikation mit dem Differential dx ist an dieser Stelle ein reiner Formalismus (ein Kalkül), von dem man zeigen kann, dass er zu einem richtigen Ergebnis führt.

Abbildung 3: Lösung einer Differentialgleichung mittels Trennung der Variablen (Bleier u. a., 2012, S. 84)

Bemerkung: Die Lösung in Beispiel D hätte man auch durch **Trennung der Veränderlichen** wie folgt berechnen können. **Erkläre an diesem Beispiel die Namensgebung dieses Standardverfahrens!**

$y' = \frac{dy}{dx} = x \Rightarrow dy = x \cdot dx \Rightarrow \int dy = \int x \cdot dx \Leftrightarrow \int 1 \cdot dy = \int x \cdot dx \Rightarrow y = \frac{x^2}{2} + c$

Oft gibt man sich nicht mit *partikulären* Lösungen *allein* zufrieden; man sucht *alle* Lösungen:

Abbildung 4: Lösung einer Differentialgleichung mittels Trennung der Veränderlichen (Götz u. a., 2013, S. 42)

Beispiel 4.24: Methode der Trennung der Variablen **B, D**

Löse folgende Anfangswertaufgabe (erläutere die Vorgangsweise):
a) $x + y \cdot y' = 0, \quad y(4) = 3$ **b)** $y' + 2y = 1, \quad y(0) = 3$

Lösung

Zu **a)** Wir ersetzen zuerst y' durch den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$: $x + y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$.
Multiplikation mit dx ergibt: $x \cdot dx + y \cdot dy = 0$. Schreibt man diese Gleichung in der Form $x \cdot dx = -y \cdot dy$, so enthält die linke Seite der Gleichung nur die Variable x und ihr Differential dx, die rechte nur die Variable y und ihr Differential dy. **Die Variablen x und y konnten somit getrennt werden**, was dieser Methode ihren Namen gab. Beide Seiten können nun unbestimmt integriert werden:

Abbildung 5: Lösung einer Differentialgleichung mittels Trennung der Variablen (Timischl & Kaiser, 2014, S. 124)

3. Rechnen mit reellwertigen Funktionen

Reellwertige Funktionen sind Funktionen, deren Bildbereich die Menge der reellen Zahlen ist. Im Weiteren betrachten wir reellwertige Funktionen, die denselben Definitionsbereich D haben. Für Funktionen f, g von D nach $\mathbb{R}$ sind deren Summe $f+g\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ und deren Produkt $f \cdot g\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch:

Für alle $z \in D$ ist $(f+g)(z) := f(z) + g(z)$ und $(f \cdot g)(z) := f(z) \cdot g(z)$.

Bei diesen Definitionen werden die Zeichen $+$ und $\cdot$ mit zwei unterschiedlichen Bedeutungen verwendet: Das Zeichen $+$ zwischen f und g steht für die neu definierte Summe von Funktionen, das Zeichen $+$ zwischen $f(z)$ und $g(z)$ steht für die schon bekannte Summe von reellen Zahlen. Analoges gilt für das Zeichen $\cdot$.

Ist c eine reelle Zahl, schreiben wir c auch für die („konstante") Funktion von D nach $\mathbb{R}$, die jedem Element von D die Zahl c zuordnet. Man nennt dann das Produkt der konstanten Funktion c mit einer Funktion f das „c-fache von f".

Für $f \cdot f$ schreiben wir auch f^2. Die *identische Funktion* bezeichnen wir mit x, also $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x(t) = t$ für alle reellen Zahlen t. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet x^n folglich die *Potenzfunktion* vom Grad n, also $x^n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x^n(t) = t^n$ für alle reellen Zahlen t. Mit $\frac{1}{x}$ bezeichnen wir die Funktion von $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ nach $\mathbb{R}$ mit $\frac{1}{x}(t) = \frac{1}{t}$ für alle reellen Zahlen $t \neq 0$.

Für reellwertigen Funktionen gelten die gleichen grundlegenden Rechenregeln wie für das Rechnen in Zahlbereichen:

Für alle reellwertigen Funktionen f, g, h mit demselben Definitionsbereich ist

- $f+g = g+f$ und $f \cdot g = g \cdot f$
  (Kommutativgesetz; die Summanden bzw. die Faktoren dürfen vertauscht werden),
- $(f+g)+h = f+(g+h)$ und $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$
  (Assoziativgesetz; beim Addieren und Multiplizieren können Klammern weggelassen werden),
- $(f+g) \cdot h = (f \cdot h) + (g \cdot h)$
  (Distributivgesetz; man kann ausmultiplizieren und herausheben),
- $f+0 = f$ und $f \cdot 1 = f$
  (neutrale Elemente; die konstante Funktion 0 addieren oder mit der konstanten Funktion 1 multiplizieren verändert nichts) und
- zu jeder reellwertigen Funktion f gibt es eine Funktion $-f$ mit $f + (-f) = 0$
  (bezüglich der Addition gibt es inverse Elemente; die Umkehrung der Addition ist möglich).

In der Sprechweise der Algebra: Die Menge aller reellwertigen Funktionen mit einem vorgegebenen Definitionsbereich ist zusammen mit der (oben definierten) Addition und Multiplikation ein kommutativer Ring.

Besitzt f in D keine Nullstelle, so ist auch $\frac{1}{f}$ auf D definiert durch $\frac{1}{f}(t) = \frac{1}{f(t)}$ für alle $t \in D$. Dann ist $f \cdot \frac{1}{f} = 1$.

Eine ausführliche Betrachtung zum Thema *Rechnen mit Funktionen* ist in Pauer & Stampfer (2014) zu finden.

4. Verkettung von Funktionen

Sind D und E Teilmengen von $\mathbb{R}$ (zum Beispiel $\mathbb{R}$ selbst oder ein Intervall), $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ reellwertige Funktionen mit der Eigenschaft, dass für alle $t \in D$ gilt: $f(t) \in E$, dann heißt die Funktion

$$g \circ f\colon D \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mit } (g \circ f)(t) := g(f(t))$$

die *Verkettung* (oder *Zusammensetzung* oder *Hintereinanderausführung*) von g mit f.
Sprechweise: „g nach f“.

Beispiel 4.1. Die Funktionen f und g (von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$) mit $f(t) = t + 1$ und $g(t) = t^2$ können zu $g \circ f$ und zu $f \circ g$ zusammengesetzt werden. Für alle Zahlen t ist

$$(g \circ f)(t) = g(f(t)) = (t+1)^2$$

und

$$(f \circ g)(t) = f(g(t)) = t^2 + 1\,.$$

Den Funktionswert $(g \circ f)(t)$ von $g \circ f$ an der Stelle t zu berechnen heißt hier also: Addiere zuerst 1 zu t und quadriere dann.
Den Funktionswert $(f \circ g)(t)$ von $f \circ g$ an der Stelle t zu berechnen heißt also: Quadriere zuerst t und addiere dann 1.
Wegen $(g \circ f)(1) = 4 \neq 2 = (f \circ g)(1)$ ist $g \circ f \neq f \circ g$. „Verketten“ ist also nicht kommutativ.

Es ist leicht nachzuprüfen, dass für die Verkettung die folgenden grundlegenden Rechenregeln gelten: Für alle reellwertigen Funktionen f, g, h von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist

- $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
  (Assoziativgesetz),
- $(f + g) \circ h = (f \circ h) + (g \circ h)$
  (Distributivgesetz von rechts),
- $f \circ x = x \circ f = f$
  (die identische Funktion x ist das neutrale Element bezüglich der Verkettung) und
- $(f \cdot g) \circ h = (f \circ h) \cdot (g \circ h)\,.$

Aber Vorsicht, die folgenden Rechenregeln gelten *nicht*:

- $f \circ g = g \circ f$
  (Kommutativgesetz),
- $h \circ (f + g) = (h \circ f) + (h \circ g)$
  (Distributivgesetz von links) und
- $h \circ (f \cdot g) = (h \circ f) \cdot (h \circ g)\,.$

Weil das Distributivgesetz von links nicht gilt, ist die Menge aller reellwertigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit Addition $+$ und Verkettung $\circ$ kein Ring, sondern nur ein *Fastring*, cf. Pilz (1977). Weil für die Verkettung das Assoziativgesetz gilt, brauchen wir bei der Verkettung von mehr als zwei Funktionen keine Klammern zu schreiben.

Beispiel 4.2. Für reelle Zahlen a, b, c sei f die Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit $f(t) = a \cdot t + b$ und g die Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit $g(t) = c \cdot t$. Mit *sin* bezeichnen wir wie üblich die Sinusfunktion. Die Zusammensetzung $g \circ sin \circ f$ mit

$$(g \circ sin \circ f)(t) = c \cdot sin(a \cdot t + b)$$

nennt man allgemeine Sinusfunktion.
Diese Zusammensetzung der homogenen linearen Funktion g mit der Sinusfunktion und mit der linearen Funktion f an der Stelle t auswerten bedeutet: Multipliziere zuerst t mit a und addiere b. Berechne dann den Sinus von dieser Zahl. Multipliziere schließlich mit c.

Beispiel 4.3. Mit x bezeichnen wir die identische Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, also die Funktion, die jeder Zahl sich selbst zuordnet. Die rationale Funktion $\frac{1}{(x+1)^2}$ ist die Verkettung

$$\frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{x} \circ x^2 \circ (x+1)$$

der linearen Funkton $x+1$ mit der quadratischen Funktion x^2 und der rationalen Funktion $\frac{1}{x}$.
Diese an der Stelle t auswerten bedeutet (in der angegebenen Reihenfolge): Addiere 1 zu t. Quadriere diese Zahl. Invertiere.

Die Darstellung einer Funktion als Verkettung von anderen ist nicht eindeutig.

Beispiel 4.4. Die auf dem Intervall $[-1, 1]$ definierte Funktion f mit $f(t) = \sqrt{1-t^2}$ kann auf die folgenden zwei Weisen als Verkettung geschrieben werden (siehe Abbildung 6):

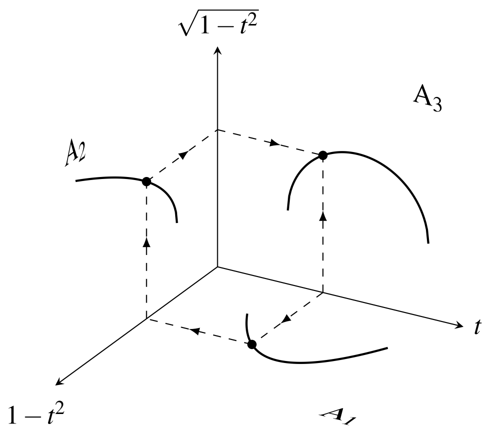
$$f = \sqrt{\cdot} \circ (1-x) \circ x^2$$
$$f = \cos \circ \arcsin$$

Die Gleichheit der zwei Funktionen kann durch Auswerten nachgewiesen werden: Für alle reellen Zahlen t mit $-1 \leq t \leq 1$ ist

$$(\sqrt{\cdot} \circ (1-x) \circ x^2)(t) = \sqrt{1-t^2}$$

und

$$(\cos \circ \arcsin)(t) = \cos(\arcsin(t)) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(t))} = \sqrt{1-t^2}\,.$$



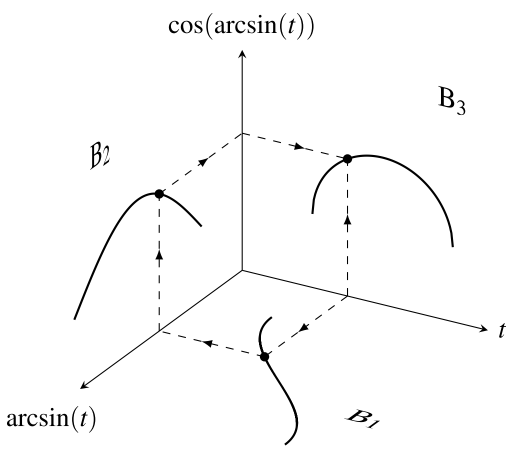


Abbildung 6: In Ebene A_1 ist der Graph von $1-x^2$, in Ebene A_2 der Graph von $\sqrt{\cdot}$ und in Ebene A_3 der Graph von $\sqrt{1-x^2}$ dargestellt. In Ebene B_1 ist der Graph von arcsin, in Ebene B_2 der Graph von cos und in Ebene B_3 der Graph von $\cos \circ \arcsin$ dargestellt.

5. Kettenregel der Differentialrechnung

Satz 1. Wenn zwei differenzierbare Funktionen f und g (mit offenen Definitionsbereichen) verkettet werden können, dann ist auch ihre Verkettung $f \circ g$ differenzierbar. Es ist

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g' .$$

In Worten: Die Ableitung der Verkettung $f \circ g$ ist das Produkt der Verkettung der Ableitung von f mit g und der Ableitung von g.

Häufig wird der Satz so formuliert: Für alle reellen Zahlen a im Definitionsbereich von g ist

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a) .$$

In Worten: Die Ableitung an der Stelle a der Verkettung $f \circ g$ ist das Produkt der Ableitung von f an der Stelle $g(a)$ und der Ableitung von g an der Stelle a (die „innere Ableitung“).

Beweis: Für a im Definitionsbereich D_g von g definieren wir $\varphi\colon D_f \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(u) = \begin{cases} \frac{f(u)-f(g(a))}{u-g(a)}, & \text{für } u \neq g(a), \\ f'(g(a)), & \text{für } u = g(a). \end{cases}$$

Die Funktion φ ist stetig, da f differenzierbar ist. Die Ableitung an der Stelle a der Verkettung $f \circ g$ ist dann

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(a) &= \lim_{t\to a} \frac{(f \circ g)(t) - (f \circ g)(a)}{t-a} = \lim_{t\to a} \frac{f(g(t)) - f(g(a))}{t-a} = \\ &= \lim_{t\to a} \left(\varphi(g(t)) \cdot \frac{g(t)-g(a)}{t-a} \right) = \\ &= \lim_{t\to a} \varphi(g(t)) \cdot \lim_{t\to a} \frac{g(t)-g(a)}{t-a} = \varphi(\lim_{t\to a} g(t)) \cdot g'(a) = \\ &= \varphi(g(a)) \cdot g'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a) = (f' \circ g)(a) \cdot g'(a) = ((f' \circ g) \cdot g')(a) . \end{aligned}$$

Im Beweis haben wir nur verwendet, dass die Grenzwerte $f'(g(a))$ und $g'(a)$ existieren und daher der Grenzwert des Produktes das Produkt der Grenzwerte ist.

Beispiel 5.1. Mit x bezeichnen wir die identische Funktion und berechnen mit Hilfe der Kettenregel die Ableitung der Funktion $\sin \circ (2 \cdot x + 1)$:

$$(\sin \circ (2 \cdot x + 1))' = (\sin' \circ (2 \cdot x + 1)) \cdot (2 \cdot x + 1)' = (\cos \circ (2 \cdot x + 1)) \cdot 2 = 2 \cdot (\cos \circ (2 \cdot x + 1))$$

Anders formuliert: für alle $t \in \mathbb{R}$ ist

$$(\sin \circ (2 \cdot x + 1))'(t) = 2 \cdot \cos(2 \cdot t + 1) .$$

Beispiel 5.2. Für jede differenzierbare Funktion g von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^+$ ist

$$(\ln \circ g)' = (\ln' \circ g) \cdot g' = \left(\frac{1}{x} \circ g \right) \cdot g' = \frac{1}{g} \cdot g' = \frac{g'}{g} .$$

Oder anders formuliert: Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist

$$(\ln \circ g)'(t) = \ln'(g(t)) \cdot g'(t) = \frac{g'(t)}{g(t)} .$$

Beispiel 5.3. Für alle differenzierbaren Funktionen f von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist auch ihre Umkehrfunktion f^{-1} differenzierbar. Ihre Ableitung kann mit Hilfe der Kettenregel berechnet werden: Wir gehen von der Definition der Umkehrfunktion aus

$$f \circ f^{-1} = x$$

und differenzieren auf beiden Seiten

$$(f' \circ f^{-1}) \cdot (f^{-1})' = (f \circ f^{-1})' = x' = 1\,.$$

Daraus folgt

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

(dabei muss der Definitionsbereich von $(f^{-1})'$ so verkleinert werden, dass $f' \circ f^{-1}$ dort keine Nullstelle hat). Anders formuliert: für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $f'(f^{-1}(t)) \neq 0$ ist

$$(f^{-1})'(t) = \frac{1}{f'(f^{-1}(t))}\,.$$

Man kann die Kettenregel besser verstehen, wenn man statt der Ableitung der Funktion ihre Differentiale betrachtet. Für eine differenzierbare Funktion f von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ heißt die homogene lineare Funktion d_af von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit $d_af(1) = f'(a)$ das *Differential von f an der Stelle a*. In einer kleinen Umgebung von a wird die Funktion f sehr gut durch die lineare Funktion, deren Funktionswert an der Stelle t gleich

$$f(a) + d_af(t-a) = f(a) + f'(a)(t-a)$$

ist, angenähert (siehe Abbildung 7).

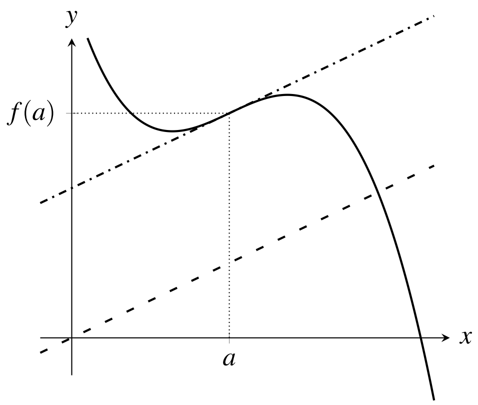


Abbildung 7: Graphen einer Funktion (durchgezogen), ihrer linearen Approximation im Punkt a (punktstrichliert) und des Differentials von f im Punkt a (strichliert).

Satz 2. Wenn zwei differenzierbare Funktionen f und g (mit offenen Definitionsbereichen) verkettet werden können, dann ist das Differential der Verkettung die Verkettung der Differentiale, das heißt: Für alle reellen Zahlen a im Definitionsbereich von g ist

$$d_a(f \circ g) = d_{g(a)}f \circ d_ag = f'(g(a)) \cdot g'(a)\,.$$

Beweis: Für das Differential der Verkettung an der Stelle a ist

$$d_a(f \circ g)(1) = (f \circ g)'(a)\,.$$

Für die Verkettung der Differentiale an den Stellen $g(a)$ und a ist

$$(d_{g(a)}f \circ d_ag)(1) = (d_{g(a)}f)(d_ag(1)) = (d_{g(a)}f)(g'(a)) = (d_{g(a)}f)(1) \cdot g'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)\,.$$

6. Integrieren durch Substitution

Für eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt eine differenzierbare Funktion $F : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *Stammfunktion* von f, wenn $F' = f$ ist. Wir schreiben für F dann auch $\int f(t)dt$. Wir nehmen im Weiteren immer an, dass der Definitionsbereich D von f ganz $\mathbb{R}$ oder ein Intervall ist. Dann erhält man alle Stammfunktionen der Funktion f, wenn man zu einer Stammfunktion eine beliebige konstante Funktion addiert.

Aus der Summenregel und Produktregel der Differentialrechnung erhält man entsprechende Regeln für die Berechnung von Stammfunktionen (mit c wird immer eine konstante Funktion bezeichnet):

- Aus $(f+g)' = f' + g'$ folgt $\int (f+g)(t)dt = \int f(t)dt + \int g(t)dt + c$ („Die Stammfunktion der Summe ist die Summe der Stammfunktionen").
- Aus $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ folgt $\int (f' \cdot g)(t)dt = f \cdot g - \int (f \cdot g')(t)dt$ („partielle Integration").

Die der Kettenregel entsprechende Methode zur Berechnung einer Stammfunktion heißt *Integration durch Substitution*. Eine Stammfunktion $\int h(t)dt$ *durch Substitution berechnen* heißt:
Finde differenzierbare Funktionen f und g so, dass

$$h = (f' \circ g) \cdot g' \; (= (f \circ g)')$$

ist. Dann ist

$$\int h(t)dt = f \circ g + c\,.$$

Eine Darstellung von h als Ableitung der Verkettung zweier anderer Funktionen ist aber selten direkt ersichtlich (und auch nicht eindeutig). Wird g gewählt (und hat eine Umkehrfunktion g^{-1}), dann ist $f' = \frac{h}{g'} \circ g^{-1}$. Man versucht also g so zu wählen, dass eine Stammfunktion von $\frac{h}{g'} \circ g^{-1}$ berechnet werden kann.

Im Schulunterricht werden häufig Aufgaben behandelt, bei denen die folgenden drei Spezialfälle der Integration durch Substitution auftreten.

(1) „Lineare Substitution" bei Funktionen h mit $h(t) = f'(at+b) \cdot a$ und $a \neq 0$: Wir wählen $g = ax+b$, dann ist $g' = a$ und

$$h = (f' \circ g) \cdot g' = (f \circ g)'\,.$$

Anders formuliert: Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist

$$h(t) = f'(at+b) \cdot a = (f \circ (ax+b))'(t)\,.$$

Nun muss nur eine Stammfunktion f von f' berechnet werden. Dann ist

$$\int h(t)dt = f \circ (ax+b) + c\,.$$

Beispiel 6.1. Wir suchen eine Stammfunktion $\int \sin(2t+1)dt$ der Funktion $\sin \circ (2x+1)$. Es ist

$$\sin \circ (2x+1) = \frac{1}{2}(\sin \circ (2x+1)) \cdot 2.$$

Wir wählen $g = 2x+1$. Also ist

$$\frac{1}{2}(\sin \circ (2x+1)) \cdot 2 = \frac{1}{2}(\sin \circ g) \cdot g' = -\frac{1}{2}(\cos \circ (2x+1))'$$

und

$$\int \sin(2t+1)dt = -\frac{1}{2}\cos \circ (2x+1) + c\,.$$

(2) $h = g^p \cdot g'$, mit $p \in \mathbb{R}$. Daraus ergibt sich mit $f' = x^p$:

$$h = (f' \circ g) \cdot g' = (f \circ g)' .$$

Dann muss nur eine Stammfunktion f von $f' = x^p$ gefunden werden.

Beispiel 6.2. Wir suchen eine Stammfunktion $\int \frac{t^2}{(2t^3-7)^8} dt$ der Funktion $h = (x^{-8} \circ (2x^3 - 7)) \cdot x^2$. Wir wählen $g = 2x^3 - 7$ und berechnen $g' = 6x^2$. Dann ist

$$(x^{-8} \circ (2x^3 - 7)) \cdot x^2 = \frac{1}{6}\left(x^{-8} \circ (2x^3 - 7)\right) \cdot 6x^2 = \frac{1}{6}(x^{-8} \circ g) \cdot g' .$$

Eine Stammfunktion von x^{-8} ist $-x^{-7}/7$, also ist

$$\int \frac{t^2}{(2t^3 - 7)^8} dt = \frac{1}{6}\left(\frac{x^{-7}}{-7} + c\right) \circ g = -\frac{1}{42} \cdot \frac{1}{(2x^3 - 7)^7} + c .$$

(3) In manchen Fällen findet man eine Stammfunktion durch Verkettung von h mit einer „geeigneten" Funktion.

Beispiel 6.3. Wir suchen eine Stammfunktion $\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$ der Funktion $h = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Wir erinnern uns an Beispiel 4.4: $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{\cdot} \circ (1 - x^2) = \cos \circ \arcsin$. Das legt nahe, $h \circ \sin$ zu betrachten:

$$h \circ \sin = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \circ \sin = \frac{1}{\cos \circ \arcsin} \circ \sin = \frac{1}{\cos} = \frac{1}{\sin'} .$$

Also ist

$$(h \circ \sin) \cdot \sin' = 1 .$$

Nach der Kettenregel ist die linke Seite die Ableitung von $(\int h(t)dt) \circ \sin$, somit ist

$$\left(\int h(t)dt\right) \circ \sin = x + c .$$

Dann verketten wir mit arcsin, also ist

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int h(t)dt = (x + c) \circ \arcsin = \arcsin + c .$$

Die Integration durch Substitution lässt sich auch für bestimmte Integrale formulieren. Für stetig differenzierbare Funktionen f, g und reelle Zahlen a, b ist

$$\int_a^b f'(g(t))g'(t)dt = \int_a^b (f' \circ g)(t)g'(t)dt = \int_a^b (f \circ g)'(t)dt = f(g(b)) - f(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f'(t)dt ,$$

also ist für eine stetige Funktion s (entspricht f' von eben)

$$\int_a^b s(g(t))g'(t)dt = \int_{g(a)}^{g(b)} s(t)dt .$$

Beispiel 6.4. Für reelle Zahlen a, b berechnen wir das bestimmte Integral $\int_a^b \sin(2t+1)dt$. Es ist

$$\int_a^b \sin(2t+1)dt = \frac{1}{2}\int_a^b \sin(2t+1) \cdot 2dt = \frac{1}{2}\int_{2a+1}^{2b+1} \sin(t)dt = -\frac{1}{2}(\cos(2b+1) - \cos(2a+1)) .$$

7. Methode der Trennung der Variablen

Wir stellen nun für die Aufgabe: „Löse die Differentialgleichung $y' = x \cdot y$!“ eine in jedem Schritt nachvollziehbare Vorgehensweise jener wie in den Abbildungen 3–5 gegenüber.

Gleichung	$y' = x \cdot y$	$y' = x \cdot y$	Gleichung
		$\frac{dy}{dx} = x \cdot y$	Ersetze y' durch den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$
Dividiere durch y (der Definitionsbereich von y muss eventuell verkleinert werden)	$\frac{y'}{y} = x$	$\frac{dy}{y} = x\,dx$	Multipliziere mit dx, dividiere durch y
		$\int \frac{dy}{y} = \int x\,dx$	Ergänze das Integralzeichen auf beiden Seiten
Finde eine Stammfunktion auf beiden Seiten	$\ln \circ \lvert y \rvert = \frac{x^2}{2} + c$, $c \in \mathbb{R}$	$\ln \lvert y \rvert = \frac{x^2}{2} + c$, $c \in \mathbb{R}$	Integriere auf beiden Seiten

In beiden Lösungswegen hat man jetzt – bis auf die Notation – denselben Stand erreicht. Daraus wird die Lösung y mit $y(t) = c_1 \cdot e^{t^2/2}$, $c_1 \in \mathbb{R}$ mit Hilfe der Exponentialfunktion berechnet.

Beide Vorgehensweisen kommen zum selben Ergebnis, unterscheiden sich dennoch deutlich.

In der linken Spalte werden die Symbole dx, dy und $\frac{dy}{dx}$ nicht gebraucht. Es wird der Begriff Stamm*funktion* genannt und damit betont, dass man eine Funktion als Lösung sucht. Man muss bei dieser Vorgehensweise eine Stammfunktion von $\frac{y'}{y}$ (und nicht nur, wie auf der rechten Seite, von $\frac{1}{y}$) kennen. Dazu müssen vorher die Kettenregel besprochen und Aufgaben wie Beispiel 5.2 gelöst werden.

In der rechten Spalte wird zwischen x und y als Funktionen und x und y als Integrationsvariablen im Integral hin und her gewechselt. Die Vorgehensweise in der rechten Spalte kann zwar, wie im obigen Beispiel, die Behandlung der Kettenregel umgehen, da deren Bedeutung durch die symbolischen Rechnungen verschleiert wird, allerdings geschieht dies auf Kosten der Nachvollziehbarkeit, denn bereits

$$y' = \frac{dy}{dx} = dy \cdot \frac{1}{dx}$$

kann im Schulunterricht nicht mehr zufriedenstellend erklärt werden.

8. Vor- und Nachteile von Merkregeln

- Merkregeln erleichtern das mechanische Operieren, tragen daher zur Handlungskompetenz *Operieren und Technologieeinsatz* bei. Ihre Nützlichkeit wird aber durch das Vorhandensein von CAS und anderer Technologie relativiert: Alle mit Hilfe dieser Merkregeln in der Schule berechneten Integrale oder Lösungen von Differentialgleichungen können mit Knopfdruck in den gängigen CAS abgerufen werden. Die Möglichkeit, diese Integrale zu berechnen oder diese Differentialgleichungen zu lösen, kann also für sich allein kein Argument für die Merkregeln sein. Vor allem, weil es verstehbare Alternativen dazu gibt, die wir in den vorangegangenen Abschnitten dargestellt haben.
- Dem stehen mehrere Nachteile gegenüber: Solche Merkregeln tragen nichts zum Verständnis der entsprechenden Rechenverfahren bei, im Gegenteil, sie legen nahe, dass man manche Inhalte der Mathematik einfach nicht erklären und verstehen könne. Die Handlungskompetenz *Argumentieren und Kommunizieren* wird damit nicht nur vernachlässigt, sondern ihre Bedeutung auch relativiert. Beide Merkregeln legen nahe, dass $\frac{dy}{dx}$ nicht *ein* Symbol (bzw. eine andere, aufwändigere Schreibweise für y') ist, sondern ein Quotient von dx und dy – und damit sind viele falsche Vorstellungen verbunden.

In unserer demokratischen Gesellschaft muss auch der Mathematikunterricht einen Beitrag dazu leisten, Schülerinnen und Schülern die Entwicklung zu kritisch denkenden mündigen Bürgerinnen und Bürgern zu ermöglichen, die sachlich zu argumentieren gelernt haben. Durch ohne Verständnis eintrainierte Merkregeln lernen sie aber, auf Zuruf Befehle unreflektiert auszuführen – wollen wir das?

Wir danken Manfred Borovcnik für das sorgfältige Lesen unseres Manuskripts und zahlreiche Verbesserungsvorschläge.

Literatur

Bleier, G., Lindenberg, L., Lindner, A. und Stepancik, E. (2012): *Dimensionen Mathematik 8*, 1. Auflage. Wien: E. Dorner.

Götz, S., Reichel H.-C., Müller, R. und Hanisch, G. (2013): *Mathematik 8*, 1. Auflage. Wien: öbv.

Pauer, F. und Stampfer, F. (2014): Mit Funktionen rechnen – ein wichtiges Thema der Sekundarstufe 2. *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der ÖMG*, 47, S. 62–67.

Pilz, G. (1977): *Near-Rings*. Amsterdam: North-Holland.

Timischl, W. und Kaiser, G. (2013): *Ingenieur-Mathematik 3*, 1. Auflage. Wien: E. Dorner.

Timischl, W. und Kaiser, G. (2014): *Ingenieur-Mathematik 4*, 1. Auflage. Wien: E. Dorner.